Zadaci s pismenih ispita iz Matematike I prvi dio

1. Dokažite da $\forall n \in N$ vrijedi:

$$\sum_{k=1}^{n} k\, k! = (n+1)! - 1.$$

2. Dokažite da $\forall n \in N$ vrijedi:

$$\sum_{k=1}^{n} (k+2)(k+2)! = (n+3)! - 6.$$

3. Dokažite da je broj $3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1}$ djeljiv sa 19, $\forall n \in N$.

4. Dokažite da je $11 \cdot 10^{2n} + 1$ djeljivo s 3 za svaki $n \in N$.

5. Dokažite da je $54^n + 16 \cdot 3^n$ djeljivo s 17 za svaki $n \in N$.

6. Dokažite da $\forall n \in N$ vrijedi:

$$(1 - \frac{4}{1})(1 - \frac{4}{9})(1 - \frac{4}{25}) \cdots (1 - \frac{4}{(2n-1)^2}) = \frac{1+2n}{1-2n}$$

7. Dokažite da $\forall n \in N$ vrijedi:

$$(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{16}) \cdots (1 - \frac{1}{(n+1)^2}) = \frac{n+2}{2n+2}$$

8. Dokažite da $\forall n \in N$ vrijedi: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.

9. Primjenom aksioma matematičke indukcije odredite n-tu derivaciju funkcije zadane formulom $f(x) = \ln x$.

10. Pomoću aksioma matematičke indukcije dokažite da je n-ta derivacija funkcije $f(x) = \sin x$ jednaka: $f^{(n)}(x) = \sin{(x + \frac{n\pi}{2})}$.

11. Zbroj koeficijenata prvog, drugog i trećeg člana razvoja binoma $(x + \frac{1}{x})^n$ iznosi 37. Odredite treći član tog razvoja.

12. Zbroj koeficijenata prvog, drugog i trećeg člana razvoja binoma $(\sqrt{x} - 1)^n$ iznosi 92. Odredite šesti član tog razvoja.

13. U razvoju $(x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{3}})^{10}$ jedan od članova sadrži cjelobrojnu potenciju od x. Odredite taj član.

14. Izračunajte koeficijent uz x^{-2} u izrazu $(2x^2 - x^{-\frac{2}{3}})^{15}$.

15. Izračunajte vrijednost člana koji ne sadrži a u razvoju binoma

$$(2a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-2}{7}})^{25}.$$

16. Skicirajte u kompleksnoj ravnini skup kompleksnih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu: $3 + |1 - 2z| = 2Rez.$

17. Skicirajte u Gaussovoj ravnini skup točaka koje zadovoljavaju nejednadžbe

$$1 \leq |z - i| \leq 4 \ i \ 0 \leq Argz \leq \frac{\pi}{2}.$$

18. Skicirajte u kompleksnoj ravnini one kompleksne brojeve koji zadovoljavaju uvjet $Imz^2 = 4$ i posebno one za koje je $|z| = \sqrt{5}$. Koji kompleksni brojevi zadovoljavaju oba uvjeta?

19. Skicirajte u kompleksnoj ravnini one kompleksne brojeve koji zadovoljavaju uvjet $Rez^2 = 4$ i posebno one za koje je $Arg\, z = \frac{\pi}{6}$. Koji kompleksni brojevi zadovoljavaju oba uvjeta?

20. Skicirajte u Gaussovoj ravnini $\frac{z_1}{z_2}$ gdje su z_1 i z_2 rješenja jednadžbe

$$2i|z| - \bar{z} = z + 2 + 4i\,.$$

21. Odredite one kompleksne brojeve za koje vrijedi $Im\frac{z}{\bar{z}} = 1$ i $|z - 1 - i| = \sqrt{2}$.

22. Odredite one kompleksne brojeve za koje vrijedi

$$Im\frac{i}{\bar{z}} = \frac{-1}{2} \quad i \quad |\frac{i}{\bar{z}}| = 1.$$

23. Odredite one kompleksne brojeve za koje vrijedi $Re\frac{i}{\bar{z}} = \frac{1}{2}$ i $|\frac{i}{\bar{z}}| = 1$.

    Napišite ih u trigonometrijskom obliku i skicirajte u kompleksnoj ravnini.

24. Odredite onaj kompleksni broj za koji je $\left|\frac{z}{z+1}\right| = 1$ i $\frac{z}{\bar{z}} = i$. Koliki je Arg$z$?

25. $z_1 = 1 + i$. Odredite onaj kompleksni broj $z \neq z_1$ za koji je $|zz_1| = 2$ i Re(zz_1)=0. Odredite $\sqrt{z}$.

26. Skicirajte u kompleksnoj ravnini skup kompleksnih brojeva koji zadovoljavaju uvjete $|z - i| = 3$ i $Imz \leq Rez.$

27. Skicirajte u kompleksnoj ravnini skup kompleksnih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu

$$\text{Re}\frac{1}{z} = \frac{1}{a} \qquad , a > 0.$$

28. Skicirajte u kompleksnoj ravnini skup kompleksnih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu

$$\mathrm{Im}\frac{1}{z} = \frac{1}{a} \qquad , a > 0.$$

29. Skicirajte u kompleksnoj ravnini skup kompleksnih brojeva koji zadovoljavaju uvjete

$$|\frac{z-12}{z-8i}| = \frac{5}{3} \quad i \quad |\frac{z-8}{z-4}| = 1.$$

30. Skicirajte u Gaussovoj ravnini sve kompleksne brojeve koji zadovoljavaju jednadžbu $|z+2i| + |z-2i| = 10$.

31. Skicirajte u Gaussovoj ravnini sve kompleksne brojeve koji zadovoljavaju nejednadžbu $|z+3| + |z-3| \leq 10$.

32. Skicirajte u Gaussovoj ravnini sve kompleksne brojeve koji zadovoljavaju nejednadžbe: $|z+i| + |z-i| \leq 4$ i $Rez \leq Imz$.

33. Skicirajte u Gaussovoj ravnini sve kompleksne brojeve koji zadovoljavaju

    nejednadžbe: $|z+i| + |z-i| \geq 6$ i $Rez \geq Imz$.

34. Dokažite da za kompleksne brojeve z_1 i z_2 vrijedi identitet

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$$

35. Riješite jednadžbu $|z|^2 - 2i = 2i\,\bar{z}$ i izračunajte $\sqrt{z}$.

36. Riješite jednadžbu $z|z| + i = 0$, provjerite rezultat i izračunajte $\sqrt{z}$.

37. Nađite sve 5-te korijene iz jedinice i skicirajte ih u Gaussovoj ravnini.

38. Izračunajte $\sqrt[3]{z}$ i skicirajte rješenja u Gaussovoj ravnini ako je $|z-2| = \sqrt{2}$ i $Arg(z-2) = \frac{3\pi}{4}$.

39. Izračunajte $\sqrt[4]{z}$ i skicirajte rješenja u Gaussovoj ravnini ako je

$$|2-z| = \sqrt{2}, \quad Arg(2-z) = \frac{7\pi}{4}.$$

40. Skicirajte u Gaussovoj ravnini rješenja jednadžbe $(1+i)z^3 = 1-i$ koja leže unutar kruga $|z-i| \leq 1$.

41. Odredite kompleksni broj w iz prvog kvadranta za koji vrijedi $w^4 = z$.

    Kompleksni broj z leži na kružnici $x^2 + y^2 + 7x = 144$, $Imz = 0$, a $Rez < 0$.

42. Odredite sva rješenja jednadžbe

$$z^3 = 4i(\frac{w+1}{\overline{w}-1} + \frac{\overline{w}+1}{w-1}),$$

gdje je $w = 2+i$.

43. Zadani su $z_1 = 1 - 2i$ i $z_2 = 2 - i$. Izračunajte sve vrijednosti $\sqrt[3]{{z_1}^2 + {z_2}^2}$ i skicirajte ih u Gaussovoj ravnini.

44. Odredite najmanji prirodni broj n za koji je $(1-i)^n$ pozitivan realan broj.

45. Odredite najmanji prirodni broj n za koji je $(1-i)^n = (1+i)^n$.

46. Neka je $Re\, z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i neka z zadovoljava jednadžbu

$$\left|\frac{z}{i}\right| = \left|z + \frac{1}{i}\right|.$$

Odredite z^6.

47. Skicirajte u kompleksnoj ravnini sva rješenja jednadžbe $(1+i)z^3 = 1 - i$.

48. Skicirajte u kompleksnoj ravnini sva rješenja jednadžbe $z^4 - (1-i)^{10} = 0$.

49. Skicirajte u Gaussovoj ravnini sve kompleksne brojeve koji zadovoljavaju jednadžu $z^4 - 8(1+i)^{10} = 0$.

50. Riješite jednadžbu $z^4 + 8(1 + i\sqrt{3}) = 0$ i rješenja skicirajte u Gaussovoj ravnini.

51. Odredite sva rješenja jednadžbe $z^6 + 2z^3 + 1 = 0$.

52. Odredite sva rješenja jednadžbe $2iz^6 - 2 + 2i = 0$.

53. Izračunajte determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} \qquad gdje\, je\ z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

54. Izračunajte determinantu

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix} \qquad gdje\, je\ z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

55. Odredite kompleksne brojeve z_2 i z_3 ako su zadani kompleksni brojevi $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}i$ i $z_4 = 1 + i$ tako da moduli brojeva z_1, z_2, z_3, z_4 čine geometrijski niz, a njihovi argumenti aritmetički niz.

56. Odredite kompleksne brojeve z_2 i z_3 ako su zadani kompleksni brojevi $z_1 = 2i$ i $z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ tako da moduli brojeva z_1, z_2, z_3, z_4 čine geometrijski niz, a njihovi argumenti aritmetički niz.